

CONTROL DE GEOMETRÍA

Abril-2007

- 1) Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$
- Halla la ecuación del plano perpendicular a π y que contenga a la recta r .
 - ¿Hay algún plano paralelo a π que contenga a la recta r ? En caso afirmativo determina su ecuación. (2 puntos)
- 2) Sea la recta r de ecuación $\begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases}$ y la recta s de ecuación $\frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z}{3}$
- Calcula el valor de a sabiendo que las rectas r y s se cortan.
 - Halla el punto de corte. (2 puntos)
- 3) Considera los puntos $A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$
- Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en tres partes iguales.
 - Calcula el área del triángulo ABC , donde C es un punto de la recta $-x = y - 1 = z$
¿depende el resultado de la elección concreta del punto C ? (2 puntos)
- 4) Dados los vectores $\vec{v}(1, -1, 3)$ y $\vec{w}(-2, 6, a)$
- Halla el valor del parámetro a para que sean perpendiculares.
 - Halla el valor del parámetro a para que sean paralelos.
 - Halla el área del triángulo determinado por los dos vectores para $a = 0$. (1,5 p)
- 5) Considera el punto $P(3,2,0)$ y la recta de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$
- Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r .
 - Determina las coordenadas del punto Q , simétrico del P respecto de la recta r . (2,5 puntos)

SOLUCIONES

1) $\pi \equiv 2x + y - z + 7 = 0$

a) Plano perpendicular a π y que contenga a r

Si contiene a $r \rightarrow P(1,1,1) \quad \vec{d}(1,1,3)$, su vector de dirección, lo es también del plano buscado y el punto pertenece al mismo

Si es perpendicular a π , su vector normal $\vec{n}(2,1,-1)$, es vector director del plano buscado, entonces:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 1 & 1 & y-1 \\ 3 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi' \equiv 4x - 7y + z + 2 = 0$$

b) Para ver si es posible, vemos primero la posición de π y r , ya que para que exista ese plano, r y π tendrían que ser paralelos:

$$2(1+\lambda) + (1+\lambda) - (1+3\lambda) + 7 = 0 \Rightarrow 0\lambda = -9 \Rightarrow \text{paralelos}$$

luego, el plano pedido, tiene el mismo vector normal que $\pi \rightarrow 2x + y - z + d = 0$, para hallar d , sabemos que el plano pasa por $P(1,1,1) \rightarrow 2 + 1 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -2$

Plano: $2x + y - z - 2 = 0$

2) a) r y s se cortan, posición relativa: $\left. \begin{array}{l} \alpha + t = 1 + 2\lambda \\ 1 - 2t = -2 + \lambda \\ 4 - t = 3\lambda \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} t - 2\lambda = 1 - \alpha \\ 2t + \lambda = 3 \\ t + 3\lambda = 4 \end{array} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1-\alpha \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{vemos que } \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

y tiene que ser también $r(A') = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1-\alpha \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -5\alpha + 10 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$

b) Para $\alpha = 2 \rightarrow \left. \begin{array}{l} t - 2\lambda = -1 \\ 2t + \lambda = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -2t + 4\lambda = 2 \\ 2t + \lambda = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 5\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = 1$

Punto de corte, para $\lambda = 1 \rightarrow P(3, -1, 3)$

3) $A(1,0,-2)$ y $B(-2,3,1)$

a) $\overrightarrow{AB} = (-2,3,1) - (1,0,-2) = (-3,3,3) \rightarrow$



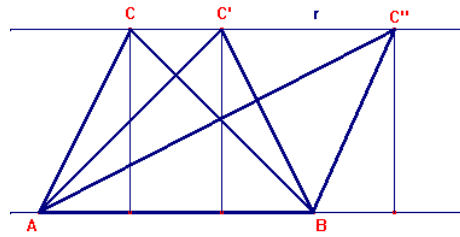
$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-1,1,1) = (c_1, c_2, c_3) - (1,0,-2) \Rightarrow C = (-1,1,1) + (1,0,-2) = (0,1,-1)$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = (-2,2,2) = (d_1, d_2, d_3) - (1,0,-2) \Rightarrow D = (-2,2,2) + (1,0,-2) = (-1,2,0)$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-3,3,3)$ y el vector de dirección de la recta: $\vec{d}(-1,1,1)$ luego la recta dada es paralela al segmento AB, por lo que el área no depende del punto (la altura del triángulo y la base serían siempre las mismas, hallamos el área por el producto vectorial, cogiendo como punto C $\rightarrow (0,1,0)$)

$$A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |(-3, 3, 3) \times (-1, 1, 2)| =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{18} \text{ u.a.}$$



4) a) Para que sean perpendiculares el producto escalar debe ser 0.

$$(1, -1, 3) \cdot (-2, 6, a) = -2 - 6 + 3a = 0 \rightarrow -8 + 3a = 0 \rightarrow a = \frac{8}{3}$$

b) Para que sean paralelos los vectores deben ser proporcionales:

$$(1, -1, 3) = t(-2, 6, a) \rightarrow \begin{cases} 1 = -2t \\ -1 = 6t \\ 3 = ta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{6} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \text{IMPOSIBLE}$$

$$c) \text{ Hacemos el p. vectorial: } \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (-18, -6, 4)$$

$$\rightarrow |\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{(-18)^2 + (-6)^2 + 4^2} = \sqrt{376} \Rightarrow A_t = \frac{\sqrt{376}}{2} u^2 = \sqrt{94} u^2$$

$$5) P(3, 2, 0) \quad r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ponemos r en paramétricas:}$$

$$z = \lambda \rightarrow x = -1 - 2\lambda \rightarrow y = 3 + \lambda + 1 + 2\lambda = 4 + 3\lambda \rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 4 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad A(-1, 4, 0)$$

$$a) \text{ Punto } P(3, 2, 0), \vec{d}(-2, 3, 1), \vec{e} = \vec{AP} = (4, -2, 0)$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} -2 & 4 & x-3 \\ 3 & -2 & y-2 \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4z + 4y - 8 + 2x - 6 - 12z = 0 \Rightarrow x + 2y - 4z - 7 = 0$$

b) Hallamos primero la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r:

$$\vec{n} = \vec{d} = (-2, 3, 1) \rightarrow \pi' \equiv -2x + 3y + z + k = 0, \text{ pero sabemos que pasa por P, es decir que } -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow -2x + 3y + z = 0$$

Hallamos la intersección de la recta dada con este plano (punto M) y este M es el punto medio del segmento PQ: $-2(-1 - 2\lambda) + 3(4 + 3\lambda) + \lambda = 0 \Rightarrow 14\lambda + 14 = 0 \rightarrow \lambda = -1$

$$\text{Luego } M(-1 - 2(-1), 4 + 3(-1), -1) = (1, 1, -1) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z+0}{2} \right)$$

$$\rightarrow Q(x, y, z) \rightarrow x = -1; y = 0; z = -2 \Rightarrow \text{el simétrico es } Q(-1, 0, -2)$$